Analytische Untersuchungen

über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender, cylindrischer Gleichgewichtsfiguren durch Condensation oder Expansion, bei constanter Masse und Energie.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Otto Kuntze.

Greifswald.

Druck von F. W. Kunike.

—

1882.

Herrn Prof. Dr. L. Matthiessen

in grösster Ehrerbietung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Analytische Untersuchungen

über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender, cylindrischer Gleichgewichtsfiguren, durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie.

Ein wegen seiner Bedeutung für die kosmischen Körper wichtiges Problem der mathematischen Physik ist dasjenige von den Gleichgewichtsfiguren. Nachdem zuerst Maclaurin*) die hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen für das Rotationsellipsoid α erfüllt gefunden hatte, erkannten Laplace**), Legendre und Ivory die Rotationsellipsoide und die satellitischen Ringe in ihrer ganzen Ausdehnung als Gleichgewichtsfiguren. Ihnen reihte Jacobi***) das dreiaxige Ellipsoid an, und es folgte auch bald der Nachweis des hydrostatischen Gleichgewichts für die cylindrischen Gleichgewichtsfiguren, die coaxialen Hohlcylinder, die absoluten Ringfiguren und die concentrischen Ringsysteme von Matthiessen†), sowie für die Mondfiguren

---

*) Maclaurin, De causa physica fluxus et refluxus maris.

**) Laplace, Méc. cél., liv. I, cap. 4; liv. II, cap. 1—4; liv. III, cap. 44.

***) Jacobi, Ueber die Figur des Gleichgewichts, Pogg. Ann. XXXIII. (1834), p. 229 seq.

†) Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten etc., Kiel 1859. — Ueber Systeme kosmischer Ringe etc. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., X., p. 59 etc. (1865). und — De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali etc. Ann. di mat. pura ed appl. (2) III. Milani 1869.

von Roche*) und Vaughan**). Im Jahre 1859, fast gleichzeitig mit dem Matthiessen'schen Beweise, erschien in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" auch von Dahlander in Gothenburg der Beweis für die Möglichkeit des Gleichgewichtes für den hohlen Kreiscylinder.

Eine allgemeine Lösung des Problems der Gleichgewichtsfiguren ist bisher noch nicht aufgefunden worden und scheint auch nach den jetzigen Hülfsmitteln der Wissenschaften, wenn nicht überhaupt, unmöglich zu sein.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Veränderungen der Axenverhältnisse, Rotationsgeschwindigkeiten, Schwerkräfte etc. der homogen flüssigen Gleichgewichtsfiguren mit cylindrischen Oberflächen, welche durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie verursacht werden, analytisch zu untersuchen.

Es sei uns erlaubt, auf die Matthiessen'sche, das entsprechende Problem für die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren behandelnde Arbeit: Ueber die Gesetze der Bewegung und Abplattung im Gleichgewichte befindlicher homogener Ellipsoide etc. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., IV., 1869) hinzuweisen, welche diesen Untersuchungen wesentlich zum Vorbilde gedient hat.

Cap. I.

Ueber die cylindrischen Gleichgewichtsfiguren und die Bedingungen ihres Gleichgewichts.

Von den cylindrischen Gleichgewichtsfiguren mit Oberflächen zweiter Ordnung können der unendliche massive Kreiscylinder, der unendliche massive elliptische Cylinder und der unendliche kreisförmige Hohlcylinder im Zustande des hydrostatischen Gleichgewichtes sein. Wir wollen den Beweis hierfür kurz geben und zugleich einige der hauptsächlichsten Eigenschaften derselben entwickeln. Der Kürze wegen sollen in dieser Arbeit jene drei obengenannten Figuren als Kreis-, elliptischer und Hohlcylinder bezeichnet werden. Es wird im Folgenden stets vorausgesetzt, dass die Masse homogen ist.

---

*) Roche, Mém. sur les fig. ellips. etc., L'institut. Paris (1849), p. 187 seq.; (1850), p. 117 et 321.

**) Vaughan, On the form of satellites etc., Phil. Mag., XX., p. 409; XXI., p. 263.

a) Massive Cylinder.

Wir gehen aus von dem elliptischen Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

oder

$$x^2(1+\lambda^2)+y^2=b^2, \tag{1}$$

wo

$$\frac{b^2}{a^2}=1+\lambda^2 \text{ ist.} \tag{2}$$

$\sqrt{1+\lambda^2}$ nennen wir das Axenverhältniss des elliptischen Cylinders.

Die allgemeine Gleichung für Niveauflächen ist

$$dp=\varrho\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\},$$

wo p den Druck, ϱ die Dichtigkeit, X, Y, Z die Anziehungscomponenten eines Punktes der Masse und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Z Axe ist hier als Rotationsaxe vorausgesetzt.

Durch Integration folgt

$$\frac{p}{\varrho}=\int\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\}+c.$$

Soll nun eine Gleichgewichtsfigur bestehen, so ist erforderlich, dass die äusserste Fläche eine Niveaufläche vom Drucke 0 sei, d. h. dass sei

$$\int\{Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2(xdx+ydy)\}+c=0. \tag{3}$$

Die Anziehungscomponenten eines beliebigen Punktes der Oberfläche des elliptischen Cylinders leiten wir ab nach Laplace*):

Für die Newton'sche Attraction ist das Potential eines Körpers auf einen beliebigen Punkt

$$v=\iiint\frac{\varrho\,\partial\eta\,\partial\xi\,\partial\zeta}{r},$$

also für den unendlichen elliptischen Cylinder mit der Z Axe als Hauptaxe

---

*) Laplace, Mechan. d. Himm., übers. v. Burckhardt, liv. III, cap. 44; cf. auch

Matthiessen, Ueber das Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVI. 1871. p. 228 seq.).

$$v = \iint \varrho \log r \, \partial\xi \, \partial\eta.$$

Sind die Coordinaten des anziehenden, resp. angezogenen Punktes ξ und η, resp. x und y, so ist

$$v = \tfrac{1}{2} \iint \varrho \, \partial\eta \, \partial\xi \, l\{(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \iint \varrho \partial\eta \partial\xi \, l\{(\eta + \xi i) - (y + xi)\} + \tfrac{1}{2} \iint \varrho \partial\eta \partial\xi \, l\{(\eta - \xi i) - (y - xi)\}$$

$$= f(y + xi) + \varphi(y - xi).$$

Es ist nun

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial (y + xi)} \cdot \frac{\partial (y + xi)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial (y - xi)} \frac{\partial (y - xi)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial (y + xi)} \cdot \frac{\partial (y + xi)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial (y - xi)} \cdot \frac{\partial (y - xi)}{\partial x}$$

und wegen

$$\frac{\partial (y + xi)}{\partial y} = \frac{\partial (y - xi)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial (y + xi)}{\partial x} = -\frac{\partial (y - xi)}{\partial x} = i$$

$$Y = f \frac{\partial v}{\partial y} = f \frac{\partial v}{\partial (y + xi)} + f \frac{\partial v}{\partial (y - xi)}$$

$$X = f \frac{\partial v}{\partial x} = if \frac{\partial v}{\partial (y + xi)} - if \frac{\partial v}{\partial (y - xi)},$$

also

$$Y - Xi = 2f \frac{\partial v}{\partial (y + xi)}.$$

Wir können nun $f(y + xi)$ erhalten, wenn wir $f(y)$ bestimmen und darauf $(y + xi)$ an Stelle von y setzen. Bestimmen wir nach Laplace die Anziehung eines Punktes $(u, 0)$ auf der Verlängerung der Y Axe, so folgt

$$v = \tfrac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-\xi}^{+\xi} \varrho \, \partial\eta \, \partial\xi \, l\{(\eta - u)^2 + \xi^2\},$$

also auch

$$2f \frac{\partial v}{\partial u} = Y - Xi = -2f\varrho \int_{-b}^{+b} \int_{-\xi}^{+\xi} \frac{(u - \eta) \partial\eta \, \partial\xi}{\xi^2 + (u - \eta)^2}$$

$$= -4f\varrho \int_{-b}^{+b} \operatorname{arctang} \frac{\xi}{u - \eta} \, d\eta.$$

Setzen wir für ξ den aus der Relation $\eta^2+\xi^2(1+\lambda^2)=b^2$ folgenden Wert ein, so ist

$$J=\int_{-b}^{+b}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)}\,d\eta,$$

und durch partielle Integration wird

$$J=\left\{\eta\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)}\right\}_{-b}^{+b}$$

$$-\int_{-b}^{+b}\frac{(b^2\eta-u\eta^2)d\eta\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2\left(\eta^2-\frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2}+\frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}\right)\sqrt{b^2-\eta^2}}.$$

Da der Ausdruck

$$\left\{\eta\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{b^2-\eta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}(u-\eta)}\right\}_{-b}^{+b}$$

verschwindet, so folgt, wenn wir mit dem Trinom

$$\left(\eta^2-\frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2}+\frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}\right)$$

in den Zähler dividiren,

$$J=\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left[u\int_{-b}^{+b}\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}\right.$$

$$\left.-\int_{-b}^{+b}\frac{b^2\eta-\frac{2u^2\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2}+\frac{u(b^2+u^2(1+\lambda^2))}{\lambda^2}}{\eta^2-\frac{2u\eta(1+\lambda^2)}{\lambda^2}+\frac{b^2+u^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}}\cdot\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}\right]$$

Es ist nun

$$u\int_{-b}^{+b}\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}=u\left(\arcsin\frac{\eta}{b}\right)_{-b}^{+b}=u\pi;$$

im zweiten Integral zerlegen wir den Factor von $\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\eta^2}}$ in Partialbrüche; dann ist

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \left[\int_{-b}^{+b} \frac{A\,d\eta}{\left(\eta - \frac{u(1+\lambda^2)}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{\lambda^2}\right)\sqrt{b^2-\eta^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-b}^{+b} \frac{B\,d\eta}{\left(\eta - \frac{u(1+\lambda^2)}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{\lambda^2}\right)\sqrt{b^2-\eta^2}}\right]\right\},$$

wo A und B die Werte

$$A = \frac{1}{2\lambda^2}\left\{b^2\lambda^2 - 2u^2(1+\lambda^2) - u(2+\lambda^2)\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}\right\}$$

$$B = \frac{1}{2\lambda^2}\left\{b^2\lambda^2 - 2u^2(1+\lambda^2) + u(2+\lambda^2)\sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}\right\}$$

zukommen. Mit Benutzung des Integrals

$$\int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \arcsin\frac{1-az}{z-a} + c, \quad (a^2 > 1),$$

dessen Richtigkeit durch Differentiation erhellt, ergiebt sich, wenn wir $z = \frac{\eta}{b}$ und

$$a_1 = \frac{u(1+\lambda^2) + \sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{b\lambda^2}, \text{ resp.}$$

$$a_2 = \frac{u(1+\lambda^2) - \sqrt{u^2(1+\lambda^2)-b^2\lambda^2}}{b\lambda^2}$$

setzen, wo a_1^2 und $a_2^2 > 1$ sind,

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \frac{A}{b\sqrt{a_1^2-1}} \arcsin\left(\frac{1-\frac{a_1\eta}{b}}{\frac{\eta}{b}-a_1}\right)_{-b}^{+b}\right.$$

$$\left. - \frac{B}{b\sqrt{a_2^2-1}} \arcsin\left(\frac{1-\frac{a_2\eta}{b}}{\frac{\eta}{b}-a_2}\right)_{-b}^{+b}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \left(\frac{A}{b\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{B}{b\sqrt{a_2^2-1}}\right)\left(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{u\pi - \frac{\pi}{b}\left(\frac{A}{\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{B}{\sqrt{a_2^2-1}}\right)\right\}.$$

Da der Wert der inneren Klammer $= b\sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}$ ist, so ergiebt sich für das gesuchte Integral

$$J = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\,\pi\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right),$$

und es ist

$$Y - Xi = -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right)$$

$$= -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left(y + xi - \sqrt{(y+xi)^2 - \frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right).$$

Setzt man für b^2 den Wert aus Gleichung (1) ein, so wird

$$Y - Xi = -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \sqrt{y^2 - x^2 + 2xyi - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}(x^2(1+\lambda^2)+y^2)}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \sqrt{\frac{y^2}{1+\lambda^2} - x^2(1+\lambda^2) + 2xyi}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y + xi - \frac{y}{\sqrt{1+\lambda^2}} - xi\sqrt{1+\lambda^2}\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} - xi(\sqrt{1+\lambda^2}-1)\right\}\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= -\frac{4\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(y - xi\sqrt{1+\lambda^2}).$$

Die Componenten der Anziehung erhalten wir, indem wir Reelles und Imaginäres trennen

$$\left.\begin{aligned} X &= -4\pi f\varrho\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\,x \\ Y &= -4\pi f\varrho\,\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\,y \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ferner ist $Z = 0$.

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichung (3) folgt

$$0 = \int\left\{-\frac{4\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(y\,dy + x\,dx\sqrt{1+\lambda^2}) + \omega^2(x\,dx + y\,dy)\right\} + c$$

oder

$$0 = -\frac{2\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}(y^2 + x^2\sqrt{1+\lambda^2}) + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2} + c.$$

Damit nun diese Gleichung den elliptischen Cylinder $x^2(1+\lambda^2)+y^2=b^2$ darstelle, ist die hinreichende und notwendige Bedingung, dass bei Gleichheit des constanten Gliedes auch die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind, d. h.

$$\frac{1+\lambda^2}{b^2:c}=\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\frac{1}{b^2:c}=\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Durch Elimination von $b^2:c$ ergiebt sich

$$\frac{\omega^2}{2}-\frac{2\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\omega^2}{2}(1+\lambda^2)-\frac{2\pi f\varrho(1+\lambda^2)}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

oder

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho}=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}(\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}.$$

oder, wenn wir als Rotationsmoment definiren $v=\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho}$, so ist

$$v=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}. \tag{5}$$

Es ist nun auch die Schwerkraft für den elliptischen Cylinder stets nach dem Innern der Masse hin gerichtet, wie aus den später entwickelten Gleichungen (12) folgt.

Für den massiven Kreiscylinder $\frac{x^2+y^2}{r^2}=1$ gehen die Componenten der Anziehung in

$$\left.\begin{aligned} X&=-2\pi f\varrho\, x\\ Y&=-2\pi f\varrho\, y\\ Z&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

über, und die Integralgleichung für das Bestehen des Kreiscylinders als Gleichgewichtsfigur ist

$$\frac{p}{\varrho}=0=-\pi f\varrho(x^2+y^2)+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+c.$$

Diese Bedingung besteht mit dem Kreiscylinder $x^2+y^2=r^2$ stets zusammen.

Damit nun auch die Schwerkraft nach dem Inneren der Masse hin gerichtet sei, ist erforderlich, dass die Schwungkraft kleiner als der absolute Betrag der Massenanziehung sei. Letztere ist aber

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} = -2\pi f \varrho \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= -2\pi f \varrho r, \qquad (7)$$

und es muss sein

$$\omega^2 r \leqq 2\pi f \varrho r, \quad \text{d. h.}$$

$$v \leqq 1. \qquad (8)$$

Es sind noch die Maximal- und Minimalwerte von v beim elliptischen Cylinder zu bestimmen. Nach den gewöhnlichen Methoden findet man die correspondirenden Werte

$$\lambda = 0, \quad v = 0,5 \quad \text{(Maximum)}$$
$$\lambda = \infty, \quad v = 0 \quad \text{(Minimum)}.$$

Die rechte Seite der Gleichung (5) ist stets positiv und reell für jeden beliebigen positiven und reellen Wert von $\sqrt{1+\lambda^2}$, d. h. es existiren für alle Axenverhältnisse reelle Winkelgeschwindigkeiten. Die Axenverhältnisse können die Werte von 1 bis ∞ durchlaufen (die Werte $\sqrt{1+\lambda^2} \lessgtr \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ schliessen wir aus, da durch dieselben nur eine Vertauschung der Axen ausgedrückt wird; wir nehmen also stets b als die grössere Axe an). Für die Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ folgt $v = 0,5$ und $v = 0$, d. h. es entsprechen den Axenverhältnissen von 1 bis ∞ Rotationsmomente, welche zwischen 0,5 und 0 liegen, und bei wachsenden Axenverhältnissen nehmen die Rotationsmomente ab, und umgekehrt.

Aus Gleichung (5) folgt

$$\sqrt{1+\lambda^2} = -\left(1 - \frac{1}{v}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-v}{v}\right)^2 - 1}$$
$$= w \pm \sqrt{w^2 - 1} \qquad (9)$$

Es ist nun aber

$$w + \sqrt{w^2+1} = \frac{1}{w - \sqrt{w^2-1}}$$

d. h. es entspricht jedem Rotationsmomente nur ein Axenverhältniss, da die Reciprocität ja nur eine Vertauschung der Axen ausdrückt.

Damit das Verhältniss der Axen ein reelles sei, muss die Quadratwurzel in Gleichung (9) reell sein, d. h.

$$\left(1-\frac{1}{v}\right)^2-1 \gtreqless 0 \quad \text{oder} \quad v \lesseqgtr 0,5.$$

Es ergeben sich also folgende Resultate:

Jedem Rotationsmomente $v \lesseqgtr 1$ entspricht ein Kreiscylinder als Gleichgewichtsfigur, jedem Rotationsmomente $v \lesseqgtr 0,5$ ein elliptischer Cylinder. An den Grenzen $v = 0$ und $v = 0,5$ verhalten sich die Halbaxen der Querschnitte des letzteren

$$a : b = 0 : 1$$
$$a : b = 1 : 1.$$

Wir erhalten im ersten Falle die unendliche Lamelle, im zweiten den Kreiscylinder als Gleichgewichtsfigur.

Betrachten wir den Fall der Ruhe und nehmen zugleich die Dichtigkeit als nicht verschwindend klein an, so folgt

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \infty,$$

d. h. es ist die Lamelle Gleichgewichtsfigur für den Zustand der Ruhe.

Für den Kreiscylinder ist die Ruhefigur wieder ein Kreiscylinder.

Wir bringen noch einige bemerkenswerte Beziehungen, welche zwischen den Schwungkräften, absoluten Massenanziehungen und Schwerkräften (Fallgeschwindigkeiten) der elliptischen Cylinder stattfinden.

Die von der relativen Schwere gesonderten Massenanziehungen A' und B' an den Polen der Querschnitte eines elliptischen Cylinders sind

$$A' = B' = \sqrt{X^2+Y^2} = -4\pi f\varrho \frac{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)+y^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}},$$

also wegen $x^2(1+\lambda^2)+y^2 = b^2$

$$A' = B' = -4\pi f\varrho \frac{b}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} = -4\pi f\varrho \frac{ab}{a+b} \qquad (10)$$

Setzen wir den aus der Gleichgewichtsbedingung (5) folgenden Wert

$$2\pi f\varrho = \frac{\omega^2}{v} = \frac{\omega^2(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{2\sqrt{1+\lambda^2}}$$

in Gleichung (10) ein, so ergiebt sich

$$A' = B' = -2\frac{\omega^2(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{a\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= -\omega^2 a(1+\sqrt{1+\lambda^2}) = -\omega^2(a+b),$$

also

$$A' = B' = -(k+l), \tag{11}$$

wo mit k und l die Schwungkräfte an den Polen der kleineren und grösseren Axe des Querschnitts bezeichnet sind.

Die Schwerkräfte A und B an denselben Polen sind

$$A = A' + \omega^2 a = A' + k$$
$$B = B' + \omega^2 b = B' + l,$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} A &= -l \\ B &= -k \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir finden also folgende Resultate:

Die Schwerkräfte (Fallgeschwindigkeiten) an den Polen der grösseren (resp. kleineren) Axe der Querschnitte eines elliptischen, im Gleichgewichte befindlichen Cylinders sind den Schwungkräften an den Polen der kleineren (resp. grösseren) Axe gleich, aber von entgegengesetzter Richtung.

Die absoluten Massenanziehungen sind gleich der negativen Summe der Schwungkräfte an den Polen der grossen und kleinen Axe der Querschnitte oder gleich der Summe der Schwerkräfte an beiden Polen.

b) Hohle Kreiscylinder.

Die hohlen Kreiscylinder genügen ebenfalls den Gleichgewichtsbedingungen. Wir geben hier im wesentlichen den von Dahlander*) hierfür gelieferten Beweis wieder.

Bezeichnen X, Y und Z die Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte, r den innern Radius des Hohlcylinders und r' denjenigen eines beliebigen Punktes, so sind

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}x \\ Y &= -2\pi f\varrho\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}y \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys., 4. B. (1859), p. 444 seq.

Setzt man diese Werte in die allgemeine Gleichung für Niveauflächen ein, so ist

$$\frac{dp}{\varrho} = \left\{\omega^2 - 2\pi f\varrho\,\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}\right\}(x\,dx + y\,dy). \qquad (14)$$

Da nun

$$x^2 + y^2 = r'^2,$$

also

$$x\,dx + y\,dy = \frac{dr'^2}{2},$$

so geht die Gleichung (14) über in

$$\frac{2\,dp}{\varrho} = \left(\omega^2 - 2\pi f\varrho\,\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}\right)dr'^2$$

oder

$$\frac{2p}{\varrho} = \omega^2 r'^2 - 2\pi f\varrho\, r'^2 + 2\pi f\varrho\, r^2 l(r'^2) + C.$$

Für $r = r'$ wird $p = 0$, also

$$0 = \omega^2 r^2 - 2\pi f\varrho\, r^2 + 2\pi f\varrho\, r^2 l(r^2) + C,$$

und durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{2p}{\varrho} = \omega^2(r'^2 - r^2) - 2\pi f\varrho(r'^2 - r^2) + 2\pi f\varrho\, r^2 l\left(\frac{r'^2}{r^2}\right).$$

Für $r' = R$ muss p gleichfalls verschwinden; also muss sein

$$\omega^2(R^2 - r^2) = 2\pi f\varrho\left\{(R^2 - r^2) - r^2 l\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\right\}$$

oder

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{r^2}{R^2 - r^2}\,l\left(\frac{R^2}{r^2}\right). \qquad (15)$$

Setzen wir jetzt als Verhältniss der Radien der äusseren und inneren Grenzfläche

$$\frac{R}{r} = \sqrt{1 + \mu^2}, \qquad (16)$$

so folgt aus $R \geqq r$ auch $\mu \geqq 0$, und die Gleichung (15) geht über in

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2}. \qquad (17)$$

Als Bedingung für die Möglichkeit des Gleichgewichtes wird daher erfordert

$$v = 1 - \frac{l(1 + \mu^2)}{\mu^2} \geqq 0$$

oder

$$\mu^2 - l(1+\mu^2) \geqq 0$$

oder

$$(1+\mu^2) - l(1+\mu^2) \geqq 1.$$

Dieselbe ist aber stets erfüllt, da $\mu \geqq 0$.

Da ferner die Schwerkraft nach dem Innern der Masse hin gerichtet sein muss, so muss die absolute Massenanziehung

$$A' = \sqrt{X^2+Y^2} = -2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= -2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R}, \qquad (18)$$

ihrem absolutem Betrage nach grösser als die Schwungkraft sein, d. h.

$$\omega^2 R \leqq 2\pi f\varrho \frac{R^2-r^2}{R}$$

oder

$$v \leqq \frac{R^2-r^2}{R^2},$$

also auch

$$v \leqq \frac{\mu^2}{1+\mu^2}.$$

Wir finden demnach das Resultat, dass innerhalb der Grenzen $v = 0$ und $v = 1$ Hohlcylinder im Gleichgewichtszustande sein können und zwar solche von beliebigem Radienverhältnisse.

Dass v keinen grösseren Wert als 1 annehmen kann, folgt leicht; denn wäre dies der Fall, so müsste sein

$$v = 1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} < 0,$$

was unmöglich ist, da $l(1+\mu^2)$ und μ^2 positive Grössen sind.

Für $\sqrt{1+\mu^2} = \infty$ ergiebt sich $v = 1-0 = 1$. Ist μ sehr klein, so ist

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = v = 1 - \frac{\mu^2 - \frac{\mu^4}{2}}{\mu^2} = \frac{\mu^2}{2}. \qquad (19)$$

Für verschwindende μ, d. h. für $\sqrt{1+\mu^2} = 1$ folgt hieraus $v = 0$, und die Axen des Cylinders haben für diesen Fall die Verhältnisse

$$R : r : L = 1 : 1 : \infty,$$

d. h. es folgt als Grenzfigur ein Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke.

Da wegen der Constanz der Masse des cylindrischen Querschnitts für $\sqrt{1+\mu^2} = \infty$ offenbar $r = 0$ ist, so findet hier ein Uebergang zum massiven Kreiscylinder statt.

Für $v = 0$ war $\mu = 0$, für $v = 1$ dagegen $\mu = \infty$. Zwischen diesen Grenzwerten ändern sich die Werte von μ stetig mit stetig wachsendem oder fallendem v, d. h. die Axenverhältnisse wachsen oder fallen mit den Rotationsmomenten.

Für zwei kreisförmige Hohlcylinder mit sehr kleinen Axenverhältnissen folgt aus $v = \frac{\mu^2}{2}$

$$v : v_1 = \mu^2 : \mu_1^2$$

und

$$\frac{\omega}{\mu} : \frac{\omega_1}{\mu_1} = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1}.$$

Für sehr grosse Axenverhältnisse werden die Rotationsmomente constant, und es folgt

$$\omega^2 : \omega_1^2 = \varrho : \varrho_1.$$

Der Fall der Ruhe würde bei endlicher Dichtigkeit eintreten für

$$v = \left(\frac{\omega^2}{2\pi f \varrho}\right)_{\omega=0},$$

d. h. für $v = 0$ und $\sqrt{1+\mu^2} = 1$. Es ist also ein Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke die Grenzfigur für den Ruhezustand.

Cap. II.

Von den Beziehungen der Elemente v, λ, μ der drei Cylinder zu der Energie ihrer Bewegung.

Unter Energie wollen wir die Flächensumme, multiplicirt in die Massenelemente verstehen; dieselbe ist gleichbedeutend mit dem Product aus der halben Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente, d. h.

$$E = \iiint \frac{\partial m}{2}\left(X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\omega}{2}\int r^2 \partial m.$$

Versehen wir die Elemente ω, r, v, E mit dem Index 1, 2 oder 3, jenachdem sie dem Kreis-, dem elliptischen oder Hohlcylinder angehören, so ist

$$E_1 = \frac{\omega_1}{2}\int r_1^2 \partial m = \frac{\omega_1}{2}\cdot\frac{M.r_1^2}{2} = \omega_1 r_1^2 .\frac{M}{4}$$

$$E_2 = \frac{\omega_2}{2}\int r_2^2 \partial m = \frac{\omega_2}{2}\cdot\frac{M(a^2+b^2)}{4} = \frac{\omega_2(a^2+b^2)}{2}\cdot\frac{M}{4}$$

$$E_3 = \frac{\omega_3}{2}\int r_3^2 \partial m = \frac{\omega_3}{2}\,\frac{M(R_3^2+r_3^2)}{2} = \omega_3(R_3^2+r_3^2).\frac{M}{4}.$$

Eliminiren wir r_1, a, b, R_3, r_3 und führen die Rotationsmomente $v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho}$ ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\omega_1.M^2}{4\pi\varrho L} = \sqrt{v_1}.\frac{\sqrt{2\pi f\varrho}.M^2}{4\pi\varrho L}\\
E_2 &= \frac{\omega_2(2+\lambda^2)a^2M}{8} = \frac{\omega_2(2+\lambda^2)M^2}{8\pi\varrho L\sqrt{1+\lambda^2}}\\
&= \frac{\sqrt{v_2}}{2}.\frac{(2+\lambda^2)}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{M^2.\sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L}\\
E_3 &= \omega_3 r_3^2(2+\mu^2)\frac{M}{4} = \frac{\omega_3(2+\mu^2)M^2}{\mu^2.4\pi\varrho L}\\
&= \sqrt{v_3}\,\frac{2+\mu^2}{\mu^2}.\frac{M^2.\sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Um eine klarere Anschauung von dem Abhängigkeitsverhältnisse der Elemente v, E, λ und μ zu erhalten, fügen wir eine Tafel berechneter Werte v, E, λ, μ bei und geben eine graphische Darstellung der Grössen v und E, indem wir v als Abscisse und E als Ordinate eines orthogonalen Coordinatensystems ansehen. Setzen wir dabei zur Vereinfachung

$$\frac{\sqrt{2\pi f\varrho}.M^2}{4\pi\varrho L} = 1,$$

so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$E_1 = \sqrt{v_1}$$

$$E_2 = \sqrt{v_2}.\frac{2+\lambda^2}{2\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{v_2}\left(\frac{1+(1+\lambda^2)+2\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

$$= \sqrt{v_2}\left(\frac{1}{v_2}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{v_2}} - \sqrt{v_2}$$

$$E_3 = \sqrt{v_3}.\frac{2+\mu^2}{\mu^2}.$$

Es ist demnach für sehr grosse Rotationsmomente (d. h. $\lim v_1 = 1$, $\lim v_2 = 0,5$, $\lim v_3 = 1$)

$$E_1 = 1$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

$$E_3 = \left\{ \sqrt{v_3} \cdot \frac{2+\mu^2}{\mu^2} \right\}_{\mu=\infty} = 1.$$

Für sehr kleine Rotationsmomente wird

$$E_1 = \sqrt{v_1} = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{v_2}} - \sqrt{v_2} = \infty$$

$$E_3 = \sqrt{v_3} \cdot \frac{2}{\mu^2} = \sqrt{\frac{\mu^2}{2}} \cdot \frac{2}{\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{v_3}} = \infty .$$

Ferner ist für sehr kleine v wegen $v = \frac{\mu^2}{2}$

v	E_1	E_2	E_3	$\sqrt{1+\lambda^2}$	$\sqrt{1+\mu^2}$
0	0	∞	∞	∞	1
0,0001	0,01	99,99	100,0	19998	1,0001
0,01	0,10	9,90	10,0	198	1,01
0,02	0,14	6,93	7,07	98,00	1,02
0,03	0,17	5,54	5,88	64,66	1,03
0,04	0,20	4,80	4,91	47,98	1,04
0,05	0,22	4,25	4,57	37,97	1,05
0,10	0,32	2,85	3,56	17,94	1,09
0,15	0,39	2,19	2,51	11,24	1,15
0,20	0,45	1,79	2,10	7,87	1,24
0,25	0,50	1,50	1,81	6,83	1,33
0,30	0,55	1,28	1,68	4,44	1,40
0,35	0,60	1,10	1,54	3,42	1,50
0,40	0,63	0,95	1,42	2,62	1,61
0,45	0,67	0,82	1,34	1,92	1,73
0,50	0,71	0,71	1,27	1,00	1,87
0,55	0,74		1,21		2,04
0,60	0,78		1,16		2,25
0,65	0,81		1,12		2,49
0,70	0,84		1,08		2,81
0,75	0,87		1,05		3,22
0,80	0,89		1,03		3,78
0,85	0,92		1,012		4,63
0,90	0,95		1,010		6,09
0,95	0,98		1,008		9,55
1,00	1,00		1,000		∞

$$\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{1+2v_3} = 1+v_3,$$

$$\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{1-v_2+\sqrt{1-2v_2}}{v_2} = \frac{2(1-v_2)}{v_2}.$$

Aus der graphischen Darstellung, sowie aus der Tabelle erkennt man, dass die Curven $E = f(v)$ gemeinschaftliche Schnittpunkte besitzen und zwar für die beiden massiven Cylinder bei $v = 0{,}5$, $E = \sqrt{2}$, für den Kreis- und den Hohlcylinder bei $v = 1$, $E = 1$, für den Hohl- und den elliptischen Cylinder bei $v = 0$, $E = \infty$. Es ergeben sich hieraus folgende Sätze:

Die Energie eines ruhenden massiven Kreiscylinders ist Null. Erhält derselbe ein Drehungsmoment, so bewahrt er die Form des massiven Kreiscylinders. Bei fortwährend durch successive Impulse wachsender Energie nimmt auch das Rotationsmoment (und somit die Rotationsgeschwindigkeit) zu. Hat letzteres die Grösse $v = 0{,}5$ bei $E = 0{,}707$ erreicht, so sind zwei Fälle möglich: entweder bleibt die Figur ein Kreiscylinder mit wachsendem Rotationsmoment, oder sie geht in einen elliptischen Cylinder mit abnehmender Rotationsgeschwindigkeit über. Bei fortgesetzten Impulsen plattet letzterer sich mehr und mehr ab, bei abnehmender Rotationsgeschwindigkeit, da das Trägheitsmoment $\int r^2 \partial m$ in $E = \frac{\omega}{2} \int r^2 \partial m$ stärker wächst als die Energie selbst, bis er bei $E = \infty$, $v = 0$ an seiner Grenze die Form der unendlichen Lamelle annimmt. Der Kreiscylinder wird im Gleichgewichtszustande beharren, bis die correspondirenden Werte $E = 1$, $v = 1$ erreicht sind, und alsdann übergehen in den Hohlcylinder, dessen Rotationsmomente bei wachsender Energie und abnehmender Dicke des Cylinders kleiner und kleiner werden, bis an der Grenze $E = \infty$, $v = 0$ die Dicke des Cylinders eine unendlich geringe wird.

Da noch an der Grenze $v = 0$, $E = \infty$ die Curven $E_2 = f(v_2)$ und $E_3 = \varphi(v_3)$ einen Punkt gemein haben, so folgt hieraus, dass es ursprüngliche Kräfte oder Energien giebt, durch welche eine freischwebende, rotirende Flüssigkeitsmasse in zwei völlig verschiedene cylindrische Gleichgewichtsfiguren übergeführt werden kann, nämlich bei den Grenzwerten $v = 0$, $E = \infty$ in die unendliche Lamelle mit dem Axenverhältnisse $a : b = 0 : 1$ oder in einen Hohlcylinder von unendlich geringer Dicke mit dem Verhältnisse der Radien der inneren und äusseren Grenzfläche $r : R = 1 : 1$.

Erhalten dagegen diese drei Gleichgewichtsfiguren fortwährend der Drehung entgegengesetzte Impulse, so nimmt die Energie ab, und die Figuren durchlaufen dieselbe Reihe der Zustände in um-

gekehrter Ordnung. Die elliptischen und Hohlcylinder erhalten grössere Rotationsmomente und gehen bei $v = 0{,}5$, $E = 0{,}707$, resp. $v = 1$, $E = 1$ in den massiven Kreiscylinder über. Letzterer verliert bei abnehmender Energie allmählig seine Rotationsgeschwindigkeit, bis bei $E = 0$, $v = 0$ als Grenzfigur ein ruhender Kreiscylinder auftritt.

Eine Zerstörung des Cylinders, wie z. B. ein Uebergang in eine andere Gleichgewichtsfigur, findet nirgends statt, da ja für den elliptischen Cylinder innerhalb der Grenzen $v = 0$ und $v = 0{,}5$, für die beiden kreisförmigen Cylinder innerhalb der Grenzen $v = 0$ und $v = 1$ die absolute Massenanziehung nie kleiner als die Schwungkraft werden kann.

Betrachten wir noch die Fälle, in welchen Kreis-, elliptische und Hohlcylinder von gleicher Masse und Energie bei gleicher Dichtigkeit zusammenbestehen können, so finden wir folgende Ergebnisse:

1) Den massiven Kreiscylindern vom Rotationsmomente $v = 0$ bis $v = 0{,}5$ entspricht weder ein elliptischer, noch ein Hohlcylinder.

2) Den massiven Kreiscylindern von den Rotationsmomenten $v = 0{,}5$ bis $v = 1$ entsprechen elliptische Cylinder mit Rotationsmomenten und Axenverhältnissen, welche zwischen

$$v = 0{,}5 \quad \text{und} \quad v = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \text{resp.}$$

$$\sqrt{1+\lambda^2} = 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1+\lambda^2} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})})$$

variiren; Hohlcylinder entsprechen aber auch ihnen nicht.

3) Den Hohlcylindern entsprechen elliptische Cylinder, deren Axenverhältnisse zwischen

$$\sqrt{1+\lambda^2} = \tfrac{1}{2}\{1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}\} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+\lambda^2} = \infty$$

und deren Rotationsmomente zwischen

$$v = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad v = 0$$

gelegen sind.

Cap. III.

Von den Veränderungen der Axenverhältnisse, Rotationsgeschwindigkeiten, Schwerkräfte etc. der homogen flüssigen, cylindrischen Gleichgewichtsfiguren durch Condensation und Expansion, bei gleicher Masse und Energie.

Wirken auf homogen flüssige, im hydrostatischen Gleichgewichte befindliche, unendliche Cylinder irgend welche inneren oder äusseren

Einflüsse, welche eine Aenderung ihrer Dichtigkeit, d. h. Expansion oder Condensation herbeiführen, mögen es nun chemische Processe, Abkühlung, Wärmezuführung von aussen oder dergl. sein, so werden sich mit der Dichtigkeit zugleich auch die Rotationsgeschwindigkeiten, Axenverhältnisse etc. ändern und zwar in bestimmter Weise, wenn Masse und Energie constant bleiben.

Es übt nun, wie aus dem Laufe der Untersuchungen erhellt, eine Condensation auf die Axenverhältnisse etc. dieselben Wirkungen aus, wie eine Vermehrung der Energie bei constanter Masse; umgekehrt wirkt eine Expansion, wie eine Verminderung der Energie.

Wir behandeln nach einander die drei cylindrischen Gleichgewichtsfiguren.

a) Massive Kreiscylinder.

Die Energie des Kreiscylinders war nach Gleichung (20)

$$E = \frac{\omega}{2} r^2 M = \frac{\omega}{4} \cdot \frac{M^2}{4\pi\varrho L} = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho}\, v}{4\pi\varrho L} \cdot M^2,$$

wo $M = r^2 \pi \varrho L$.

Betrachten wir nun zwei Kreiscylinder von gleicher Masse und Energie und sehen die durch gestrichene Buchstaben bezeichneten Elemente als constant an, so ergiebt sich aus dem Werte von E

$$\omega : \omega_1 = {r_1}^2 : r^2 = \varrho : \varrho_1 = v : v_1 ;$$

ferner folgt noch aus der für die Umlaufszeiten geltenden Relation $\omega T = \omega_1 T_1$

$$\varrho : \varrho_1 = T_1 : T = \omega : \omega_1 = v : v_1 = {r_1}^2 : r^2. \qquad (21)$$

Diese Beziehungen gelten aber nur so lange, als sie mit der Gleichgewichtsbedingung $v \leqq 1$ vereinbar sind.

Für die Grenze der Expansion, d. h. für $\varrho = 0$, besteht Gleichgewicht, und es treten die correspondirenden Werte auf

$$\varrho = 0,\ \omega = 0,\ v = 0,\ T = \infty,\ r = \infty. \qquad (22)$$

Der Querschnitt des Cylinders wird also ein unendlich grosser, bei verschwindender Rotationsgeschwindigkeit und Rotationsmoment.

Sollte nun ϱ unendlich grosse Werte annehmen, so müsste auch $v = \infty$ werden. Dies ist aber nicht möglich, da max. $v = 1$.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\pi f = 1$ sei, und dass $v_1 = \frac{1}{2}$ die Werte $\varrho_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $r_1 = 1$, $T_1 = 1$, d. h. auch

$k_1 = 1$, $A_1' = -2$, $A_1 = -1$ entsprechen, so folgt für die Grenze derjenigen Condensation, bei welcher die Kreiscylinder aufhören zu bestehen,

$$\left.\begin{aligned} v &= 1, \quad \varrho = 2, \quad \omega = 2 \\ r &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707, \quad T = 0{,}5 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Es existiren demnach bei gleicher Masse und Energie für Dichtigkeiten, welche zwischen 0 und 2 variiren, Kreiscylinder als Gleichgewichtsfiguren. Es kann bei der Condensation aber keineswegs r unendlich klein und ω unendlich gross werden, da ihre Minimal-, resp. Maximalwerte $r = 0{,}707$ und $\omega = 2$ sind.

Innerhalb der gefundenen Grenzen wachsen also die Rotationsgeschwindigkeiten und Rotationsmomente mit wachsender Dichtigkeit, dagegen nehmen die Umlaufszeiten und die Radien des Querschnitts ab.

Die Schwungkraft k an der äusseren Grenzfläche ist $k = \omega^2 r$, also $k : k_1 = \omega^2 r : \omega_1{}^2 r_1$ und, da nach (21) $\omega : \omega_1 = r_1{}^2 : r^2$

$$k : k_1 = \omega^{\frac{1}{2}} : \omega_1{}^{\frac{1}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}} : \varrho_1{}^{\frac{1}{2}} = r_1{}^3 : r^3 = v^{\frac{1}{2}} : v_1{}^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$k^2 : k_1{}^2 = \varrho^3 : \varrho_1{}^3 = \omega^3 : \omega_1{}^3 = v^3 : v_1{}^3 = r_1{}^6 : r^6 = T_1{}^3 : T^3. \tag{24}$$

An der Grenze der Expansion wird die Schwungkraft $k = 0$, für $v = \frac{1}{2}$ ist $k = 1$, für $v = 1$ dagegen $k = 2\sqrt{2} = 2{,}828$.

Die absolute Massenanziehung an der äusseren Fläche des Cylinders ist nach Gleichung (7)

$$A' = B' = -2\pi f \varrho r.$$

Mit Hülfe der Relation (24) ergiebt sich hieraus

$$A'^2 : A_1'^2 = r_1{}^2 : r^2 = \varrho : \varrho_1 = \omega : \omega_1 = v : v_1 = k^{\frac{1}{2}} : k_1{}^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

und es entsprechen einander die Werte

$$\begin{aligned} \varrho &= 0, \quad A' = 0 \\ \varrho &= 1, \quad A' = -2 \\ \varrho &= 2, \quad A' = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die Schwerkräfte an der äusseren Grenzfläche sind

$$A = A' + \omega^2 r = A' + k$$

oder

$$A = -2\pi f \varrho r + \omega^2 r = 2\pi f \varrho r (v - 1),$$

also

$$A : A_1 = r\varrho(v-1) : r_1\varrho_1(v_1-1)$$

$$= \frac{(v-1)v}{\sqrt{v}} = \frac{(v_1-1)v_1}{\sqrt{v_1}}$$

$$= \sqrt{v}(v-1) : \sqrt{v_1}(v_1-1). \qquad (26)$$

Für sehr starke Expansionen wird nahezu $v = 0 = \omega$; für zwei stark expansirte Kreiscylinder ist demnach

$$A = -2\pi f\varrho r,$$

also

$$A : A_1 = \varrho r : \varrho_1 r_1 = \varrho\sqrt{\varrho_1} : \varrho_1\sqrt{\varrho} = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1},$$

d. h. es wachsen oder fallen die Schwerkräfte bei starker Expansion mit den Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten.

An der Grenze der Expansion, d. h. für $\varrho = 0$ und $v = 0$ ist zugleich $A = 0$; für $\varrho = 1$, $v = \frac{1}{2}$ ist $A = -1$; es verschwindet A aber auch für das Maximum $\varrho = 2$, $v = 1$. An diesen Grenzen hört die Stabilität des Kreiscylinders auf, da die Schwerkraft verschwindet. Innerhalb der Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 2$ (oder $v = 0$ und $v = 1$) prävalirt dagegen die Massenanziehung über die Schwungkraft, d. h. die Schwerkraft (Fallgeschwindigkeit) ist stets nach dem Inneren der Masse hin gerichtet. Es ist deswegen innerhalb dieser Grenzen auch eine Abschleuderung von Materie nicht denkbar.

Es war schon gezeigt worden, dass an der Grenze $v = 1$ ($\varrho = 2$, $\omega = 2$, $r = 0{,}707$, $T = 0{,}5$) ein Uebergang des massiven Kreiscylinders in den hohlen Kreiscylinder stattfindet; ähnlich ist bei $v = 0{,}5$ ($\varrho = 1$, $\omega = 1$, $r = 1$, $T = 1$) ein Uebergang des Kreiscylinders in einen elliptischen Cylinder möglich.

b) Elliptische Cylinder.

Aus dem Werte der Energie (20)

$$E = \frac{\omega}{2}\int r^2\partial m = \frac{\omega}{8}M(a^2+b^2) = \omega.a^2\frac{(2+\lambda^2)}{8}.M$$

$$= \frac{\omega.M^2(2+\lambda^2)}{8\pi\varrho L\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{v}\,\frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{M^2\sqrt{2\pi f\varrho}}{8\pi\varrho L}$$

folgt für zwei elliptische Cylinder von invariabler Masse und Energie

$$\frac{\omega}{\varrho}\cdot\frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\omega_1}{\varrho_1}\cdot\frac{2+\lambda_1{}^2}{\sqrt{1+\lambda_1{}^2}};$$

ferner ist

$$v : v_1 = \frac{\omega^2}{\varrho} : \frac{\omega_1^2}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2},$$

also

$$\omega : \omega_1 = \frac{2+\lambda^2}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{2+\lambda_1^2}{(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2} \tag{27}$$

und

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\lambda^2)^2}{\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} : \frac{(2+\lambda_1^2)^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}(1+\sqrt{1+\lambda_1^2})^2}. \tag{28}$$

Für $\varrho = \infty$ wird auch $\sqrt{1+\lambda^2}$ unendlich gross, dagegen $v = 0$. Es findet also an der Grenze der Condensation noch hydrostatisches Gleichgewicht statt.

Für sehr grosse Axenverhältnisse und somit auch sehr grosse Dichtigkeiten gilt die Relation

$$v = \frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}+2+\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{2}{\lambda},$$

und für zwei elliptische Cylinder von starker Condensation ist

$$\left.\begin{aligned} &v : v_1 = \lambda_1 : \lambda, \\ &\omega : \omega_1 = 1 : 1, \text{ d. h. } \omega = \omega_1, \\ &\varrho : \varrho_1 = \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2} = \lambda : \lambda_1 \\ &v : v_1 = \varrho_1 : \varrho \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Bei zwei elliptischen Cylindern von sehr grosser Dichtigkeit sind bei derselben Masse und Energie die Dichtigkeiten den Axenverhältnissen direct, den Rotationsmomenten umgekehrt proportional, während die Winkelgeschwindigkeiten constant werden.

Das Maximum des Rotationsmomentes tritt ein für

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi f \varrho} = \left\{\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}\right\}_{\lambda=0} = \tfrac{1}{2}.$$

Auf den für diesen Wert bestehenden Cylinder beziehen wir alle Elemente mit gestrichenen Buchstaben und setzen $\pi f = 1$, $\omega_1 = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, also auch $k_1 = l_1 = 1$, $A_1' = B_1' = -2$, $A_1 = B_1 = -1$.

Es ist dann bei dieser Wahl der Constanten $\varrho = 1$ das geringste Mass der Dichtigkeit, welches beim elliptischen Cylinder aufzutreten vermag. Bei unendlich grossen Axenverhältnissen, d. h. bei unendlich

kleinen Rotationsmomenten ist dann $\varrho : 1 = \infty : 1$ oder $\varrho = \infty$, d. h. der elliptische Cylinder wird bei zunehmender Dichtigkeit stets im Gleichgewichte bleiben können.

Es würde ferner an den Grenzen der Condensation sein $\omega : 1 = 1 : \frac{1}{2}$ oder $\omega = 2$; ferner wegen $a_1 b_1 \varrho_1 = 1$

$$a^2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}.\varrho} = 0$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho} = \left\{\frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2}\right\}_{\lambda=\infty} = 1.$$

An der Grenze der Condensation verschwindet also das Rotationsmoment und die kleinere Axe des Querschnitts; die Umdrehungsgeschwindigkeit nimmt den Wert 2 an und verdoppelt sich also nur während des ganzen Verlaufes der Condensation. Der Wert der grösseren Axe wird $= 1$, bleibt also endlich und ist gleich dem Werte, welcher bei dem Rotationsmomente $v = \frac{1}{2}$ oder $\varrho = 1$ statt hatte.

Es findet für b ein Maximum statt; es ist

$$b^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho}$$

und

$$b^2 : {b_1}^2 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\varrho} : \frac{\sqrt{1+{\lambda_1}^2}}{\varrho_1}$$

oder

$$b^2 : {b_1}^2 = \frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2} : \frac{(1+{\lambda_1}^2)(1+\sqrt{1+{\lambda_1}^2})^2}{(2+{\lambda_1}^2)^2},$$

also

$$b^2 = \frac{(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}{(2+\lambda^2)^2}.$$

Bei der Bestimmung des Maximums von b verfahren wir nach den gewöhnlichen Methoden:

$$\{2\lambda(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2(2+\lambda^2)^2 + 2\lambda\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})(2+\lambda^2)^2 - 4\lambda(1+\lambda^2)(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2(2+\lambda^2)\}\frac{1}{(2+\lambda^2)^4} = 0$$

oder

$$0 = \frac{2\lambda(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{(2+\lambda^2)^3}\{2\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda^2\}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$, also durch die Axenverhältnisse

$$\sqrt{1+\lambda^2} = 1,$$
$$\sqrt{1+\lambda^2} = \infty,$$
$$\sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2{,}41421 = 1+\sqrt{2}.$$

Die beiden ersten Werte liefern Minima von b, nämlich $b = 1$; letzterer dagegen ein Maximum, nämlich

$$b = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}(1+\sqrt{1+\lambda^2})}{1+(1+\lambda^2)} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2} = 1{,}2071,$$

da für $\sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ist $1+(1+\lambda^2) = 2\{1+\sqrt{1+\lambda^2}\}$.

Diesem Werte entspricht

$$a = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2\sqrt{1+\lambda^2}} = 0{,}5.$$

Die correspondirende Dichtigkeit folgt aus

$$ab\varrho = a_1 b_1 \varrho_1 = 1,$$

also

$$\varrho = \frac{1}{a^2\sqrt{1+\lambda^2}}$$

oder

$$\varrho = 1{,}6569.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit ist

$$\omega(a^2+b^2) = \omega_1(a_1{}^2+b_1{}^2) = 2,$$

also

$$\omega = \frac{2}{a^2+b^2} = \frac{2}{a^2(2+\lambda^2)} = \frac{8}{6{,}82842}$$

oder

$$\omega = 1{,}171574;$$

endlich ist

$$v = \frac{2.2{,}41421}{3{,}41421^2} = 0{,}4337.$$

Aus der Constanz der Energie resultirte

$$\omega : \omega_1 = (a_1{}^2+b_1{}^2) : (a^2+b^2),$$

ferner da $\omega T = \omega_1 T_1$, so ist

$$T : T_1 = (a^2+b^2) : (a_1{}^2+b_1{}^2) = \omega_1 : \omega. \qquad (30)$$

Für sehr grosse Dichtigkeiten und Axenverhältnisse wird a sehr klein, und es ist

$$\omega : \omega_1 = b_1{}^2 : b^2 = T_1 : T. \qquad (31)$$

Es war ferner

$$\varrho : \varrho_1 = a_1 b_1 : ab = \frac{b_1^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} : \frac{b^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = a_1^2\sqrt{1+\lambda_1^2} : a^2\sqrt{1+\lambda^2},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sqrt{1+\lambda^2} : \varrho_1\sqrt{1+\lambda_1^2} &= a_1^2 : a^2 \\ \frac{\varrho}{\sqrt{1+\lambda^2}} : \frac{\varrho_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} &= b_1^2 : b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Für die Schwungkräfte k und l an den Polen der kleineren und grösseren Axe des cylindrischen Querschnitts ist

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= \omega^2 a : \omega_1^2 a_1 \\ l : l_1 &= \omega^2 b : \omega_1^2 b_1 \end{aligned}\right\},$$

also

$$\frac{l}{k} : \frac{l_1}{k_1} = \frac{b}{a} : \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2}, \tag{32}$$

folglich für sehr grosse Dichtigkeiten nach Gleichung (29)

$$\frac{l}{k} : \frac{l_1}{k_1} = \lambda : \lambda_1 = \varrho : \varrho_1 = v_1 : v. \tag{33}$$

Bei sehr starken Condensationen sind also die Quotienten aus den Schwungkräften an den Polen den Dichtigkeiten direct, den Rotationsmomenten umgekehrt proportional.

Aus den voraufgehenden Gleichungen resultirt noch

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= a(a_1^2+b_1^2)^2 : a_1(a^2+b^2)^2 \\ l : l_1 &= b(a_1^2+b_1^2)^2 : b_1(a^2+b^2)^2 \end{aligned}\right\}, \tag{34}$$

also für sehr grosse Dichtigkeiten und Axenverhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} k : k_1 &= \frac{b_1^4}{a_1} : \frac{b^4}{a} = b_1^3\sqrt{1+\lambda_1^2} : b^3\sqrt{1+\lambda^2} \\ l : l_1 &= b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{1}{2}} : \omega_1^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

Aus den früheren Relationen leitet man auch leicht die Gleichung ab

$$\begin{aligned}(k^2+l^2) : (k_1^2+l_1^2) &= \omega^4(a^2+b^2) : \omega_1^4(a_1^2+b_1^2) \\ &= \omega^3 : \omega_1^3 = (a_1^2+b_1^2)^3 : (a^2+b^2)^3. \end{aligned} \tag{36}$$

An der Grenze der Condensation war

$$a = 0, \quad \sqrt{1+\lambda^2} = \infty, \quad b = 1, \quad \omega = 2,$$

also ist

$$k = 0, \quad l = 4;$$

für den Maximalwert von b sind

$$k = \omega^2 a = \frac{1{,}1716^2}{2} = 0{,}6863$$

$$l = \omega^2 b = 1{,}1716^2 . 1{,}2071 = 1{,}6569.$$

Mit Hülfe der oben gefundenen Relationen über den Zusammenhang der Schwungkräfte an den Polen mit den absoluten Massenanziehungen und den Schwerkräften folgt, da $k = -B$, $l = -A$, $(k+l) = -A' = -B'$,

$$\frac{A}{B} : \frac{A_1}{B_1} = \sqrt{1+\lambda^2} : \sqrt{1+\lambda_1^2},$$

und für sehr grosse Dichtigkeiten

$$\frac{A}{B} : \frac{A_1}{B_1} = \lambda : \lambda_1 = \varrho : \varrho_1 = v_1 : v.$$

Es ist nun auch

$$\left.\begin{aligned} B : B_1 &= a(a_1^2+b_1^2)^2 : a_1(a^2+b^2)^2 \\ A : A_1 &= b(a_1^2+b_1^2)^2 : b_1(a^2+b^2)^2 \end{aligned}\right\},$$

und ferner

$$\begin{aligned}(A^2+B^2) : (A_1^2+B_1^2) &= (k^2+l^2) : (k_1^2+l_1^2) \\ &= \omega^3 : \omega_1^3 = (a_1^2+b_1^2)^3 : (a^2+b^2)^3.\end{aligned}$$

Bei sehr starken Condensationen verhält sich

$$B : B_1 = b_1^3\sqrt{1+\lambda_1^2} : b^3\sqrt{1+\lambda^2} \quad \text{und}$$
$$A : A_1 = b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{1}{2}} : \omega_1^{\frac{1}{2}}$$

Für die absolute Massenanziehung folgt

$$A' : A_1' = \omega^2(a+b) : \omega_1^2(a_1+b_1) = (k+l) : (k_1+l_1),$$

woraus für sehr grosse Dichtigkeiten resultirt

$$A' : A_1' = l : l_1 = A : A_1 = b_1^3 : b^3 = \omega^{\frac{1}{2}} : \omega_1^{\frac{1}{2}}.$$

An der Grenze der Condensation gehen die Werte A, B und A' über in

$$\begin{aligned} A &= -4 \\ B &= 0 \\ A' &= -4, \end{aligned}$$

während dem Maximum von b die correspondirenden Werte

$$\begin{aligned} A &= -1{,}6569 \\ B &= -0{,}6863 \\ A' &= -2{,}3432 \end{aligned}$$

entsprechen.

c. Hohle Kreiscylinder.

Die Energie des kreisförmigen Hohlcylinders ist nach Gleichung (20)

$$E = \frac{\omega}{4}(R^2+r^2)M = \omega r^2(2+\mu^2)\frac{M}{4} = \frac{\omega(2+\mu^2)M^2}{4\mu^2 . \pi\varrho L}$$

$$= \sqrt{v} . \frac{2+\mu^2}{\mu^2} . \frac{M^2 . \sqrt{2\pi f\varrho}}{4\pi\varrho L},$$

und es ist demnach für zwei Hohlcylinder von derselben Masse und Energie

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2+r_1^2) : (R^2+r^2)$$
$$\varrho : \varrho_1 = (R_1^2-r_1^2) : (R^2-r^2) = t_1^2 : t^2, \qquad (37)$$

wo die t die Länge der Tangenten bezeichnen, welche von einem Punkte der äusseren Oberfläche an die innere gezogen werden können. Den Quadraten dieser Tangenten sind also die Dichtigkeiten umgekehrt proportional.

Es verhält sich ferner

$$\frac{\omega(2+\mu^2)}{\mu^2} : \frac{\omega_1(2+\mu_1^2)}{\mu_1^2} = \varrho : \varrho_1 = \omega\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} : \omega_1\frac{R_1^2+r_1^2}{R_1^2-r_1^2} \qquad (38)$$

und hieraus folgt für sehr grosse Verhältnisse der Radien bei Vernachlässigung der sehr kleinen Werte $\frac{2}{\mu^2}$ und $\frac{2}{\mu_1^2}$

$$\omega : \omega_1 = \varrho : \varrho_1,$$

d. h. bei starken Condensationen sind die Rotationsgeschwindigkeiten den Dichtigkeiten proportional; weiter ist auch

$$v : v_1 = \omega : \omega_1 = \varrho : \varrho_1.$$

Ferner folgt

$$\frac{2+\mu^2}{\mu^2} : \frac{2+\mu_1^2}{\mu_1^2} = \sqrt{\frac{\varrho}{v}} : \sqrt{\frac{\varrho_1}{v_1}}$$

oder

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\mu^2)^2}{\mu^4} v : \frac{(2+\mu_1^2)^2}{\mu_1^4} . v_1. \qquad (39)$$

Diese Relationen gelten nur so lange, als sie mit der Gleichgewichtsbedingung $v = \frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = 1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}$ vereinbar sind.

Als Grenze von v bei unendlich grossem μ fanden wir $v = 1$ hier war R endlich, r dagegen unendlich klein, d. h. es fand ein Uebergang vom massiven zum hohlen Kreiscylinder statt.

Beziehen wir die durch gestrichene Buchstaben bezeichneten Elemente auf das Maximum des Rotationsmomentes und setzen, wie vorher, $\pi f = 1$, so correspondiren die Werte $v_1 = 1$, $\varrho_1 = 2$, $\omega_1 = 2$, $R_1 = 0{,}707$, $r = 0$, $\sqrt{1+\mu_1^2} = \infty$; ferner ist $k_1 = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ $A_1' = 2\sqrt{2}$; $A_1 = 0$.

Es ist zunächst nach Gleichung (39)

$$\varrho : \varrho_1 = \left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right) : \left(\frac{2+\mu_1^2}{\mu_1^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu_1^2)}{\mu_1^2}\right), \quad (40)$$

also:

$$\varrho = 2\left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right),$$

und für unendlich kleine μ

$$\varrho = 2\left(\frac{2+\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \frac{\mu^2}{2} = \frac{4}{\mu^2} = \infty.$$

Die Dichtigkeit wird also eine unendlich grosse sein können, oder der Hohlcylinder wird bei jeder noch so grossen Condensation im Gleichgewichtszustande beharren können, wenn Masse und Energie invariabel bleiben.

Es war nach Gleichung (38)

$$\omega : \omega_1 = \varrho \frac{\mu^2}{2+\mu^2} : \varrho_1 \frac{\mu_1^2}{2+\mu_1^2},$$

also

$$\omega = 2 \cdot \frac{2+\mu^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2}\right),$$

d. h. für unendlich kleine μ

$$\omega = \frac{2(2+\mu^2)}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{2} = 2.$$

Für verschwindende μ ist $\sqrt{1+\mu^2} = 1$, also $R = r$. Da nun

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2 + r_1^2) : (R^2 + r^2),$$

und somit $a(R^2+r^2) = 1$, so ist für verschwindende μ

$$r^2 = \frac{1}{\omega(2+\mu^2)} = \frac{1}{4},$$

also auch

$$r = \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{2}.$$

Es wird demnach für den Fall, dass bei unendlich grosser Dichtigkeit der cylindrische Ring unendlich dünn wird, die Oeffnung des Cylinders doch keineswegs eine unendlich grosse. Vielmehr wird der

Radius der äusseren Grenzfläche sich bei der Condensation von 0,707 bis auf 0,5 verkürzt haben. Die Rotationsgeschwindigkeit hat wieder denselben Wert angenommen, welchen sie bei $v = 1$, d. h. beim Uebergang des Hohlcylinders in den massiven Kreiscylinder hatte. Die Werte von ω fallen zuerst bis zu einem Minimum, welches etwa bei $\omega = 1{,}70$, $v = 0{,}6$, $\sqrt{1+\mu^2} = 2{,}25$ gelegen ist, und wachsen dann wieder bis $\omega = 2$.

Für sehr kleine μ war angenähert $v = \frac{\mu^2}{2}$, also

$$v : v_1 = \mu^2 : {\mu_1}^2;$$

ferner

$$\varrho : \varrho_1 = \frac{(2+\mu^2)^2}{\mu^4} \cdot \frac{\mu^2}{2} : \frac{(2+{\mu_1}^2)^2}{{\mu_1}^4} \cdot \frac{{\mu_1}^2}{2} = {\mu_1}^2 : \mu^2,$$

also auch

$$\varrho : \varrho_1 = v_1 : v = {\mu_1}^2 : \mu^2;$$

ferner ist

$$\omega : \omega_1 = \frac{\mu^2 {\mu_1}^2}{2+\mu^2} : \frac{{\mu_1}^2 \mu^2}{2+{\mu_1}^2} = \frac{1}{2+\mu^2} : \frac{1}{2+{\mu_1}^2} = 1 : 1,$$

d. h. $\omega = \omega_1$. Es finden also bei starker Condensation für den Hohl- und den elliptischen Cylinder (cf. Gleichung (29)) analoge Verhältnisse statt.

Für die Schwungkräfte K und k an der äusseren und inneren Grenzfläche gelten folgende Beziehungen

$$K = \omega^2 R, \quad k = \omega^2 r,$$

also

$$\frac{K}{k} = \frac{R}{r} = \sqrt{1+\mu^2}$$

und

$$\frac{K}{k} : \frac{K_1}{k_1} = \frac{K}{K_1} : \frac{k}{k_1} = \sqrt{1+\mu^2} : \sqrt{1+{\mu_1}^2}.$$

Es ist nun auch

$$(K^2+k^2) : (K_1^2+k_1^2) = \omega^4 (R^2+r^2) : {\omega_1}^4 (R_1^2+r_1^2),$$

also mit Benutzung der Gleichung

$$\omega : \omega_1 = (R_1^2+r_1^2) : (R^2+r^2),$$

$$(K^2+k^2) : (K_1^2+k_1^2) = \omega^3 : {\omega_1}^3 = (R_1^2+r_1^2)^3 : (R^2+r^2)^3.$$

Für sehr kleine Werte von r und k folgt

$$K^2 : K_1^2 = \omega^3 : {\omega_1}^3 = {R_1}^6 : R^6.$$

An der Grenze der Condensation wird

$$K = \omega^2 R = 2,$$
$$k = \omega^2 r = 2.$$

Die absoluten Massenanziehungen an den äusseren Grenzflächen waren

$$A' = -2\pi f \varrho \frac{R^2 - r^2}{R},$$

also auch

$$A' = -\frac{2Mf}{RL},$$

woraus sich ergiebt

$$A' : A_1' = R_1 : R,$$

d. h. die Massenanziehungen sind den Radien der äusseren Grenzfläche umgekehrt proportional.

An der Grenze der Condensation ist

$$A' = \frac{A_1'}{R} \cdot R_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{0{,}5} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = -4.$$

Für die Schwerkräfte A an der äusseren Grenzfläche folgt

$$A = A' + K = \omega^2 R - 2\pi f \varrho \frac{R^2 - r^2}{R} = \omega^2 R - \frac{2fM}{LR},$$

also

$$A : A_1 = \left\{ \omega^2 R^2 - \frac{2fM}{L} \right\} \frac{1}{R} : \left\{ \omega_1^2 R_1^2 - \frac{2fM}{L} \right\} \frac{1}{R_1}$$
$$= \left\{ KR - \frac{2fM}{L} \right\} A' : \left\{ K_1 R_1 - \frac{2fM}{L} \right\} A_1';$$

sodann ist auch

$$A = 2\pi f \varrho R \left\{ \frac{\omega^2}{2\pi f \varrho} - \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right\}$$
$$= 2\pi f \varrho R \left\{ v - \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right\}$$
$$= 2\pi f \varrho R \left\{ \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} \right\},$$

und für zwei Hohlcylinder von derselben Masse und Energie

$$A : A_1 = \varrho R \left\{ \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{l(1+\mu^2)}{\mu^2} \right\} : \varrho_1 R_1 \left\{ \frac{1}{1+\mu_1^2} - \frac{l(1+\mu_1^2)}{\mu_1^2} \right\}.$$

Für sehr kleine μ war $v = \frac{\mu^2}{2}$, also

$$A_{(\mu=0)} = 2\pi f \varrho R \left(v - \frac{2v}{1+2v} \right) = 2\pi f \varrho v R \left(1 - \frac{2}{1+2v} \right)$$
$$= \omega^2 R \left(\frac{2v-1}{2v+1} \right) = K \cdot \frac{2v-1}{2v+1}.$$

Der Ausdruck $\frac{2v-1}{2v+1}$ nähert sich nun aber für verschwindende μ und v der Grenze -1, da

$$\lim \frac{2v-1}{2v+1} = \lim \left(-\frac{2v+1}{2v+1} - \frac{4v}{2v+1} \right) = -1.$$

Es ergiebt sich also für verschwindende Axenverhältnisse die Relation

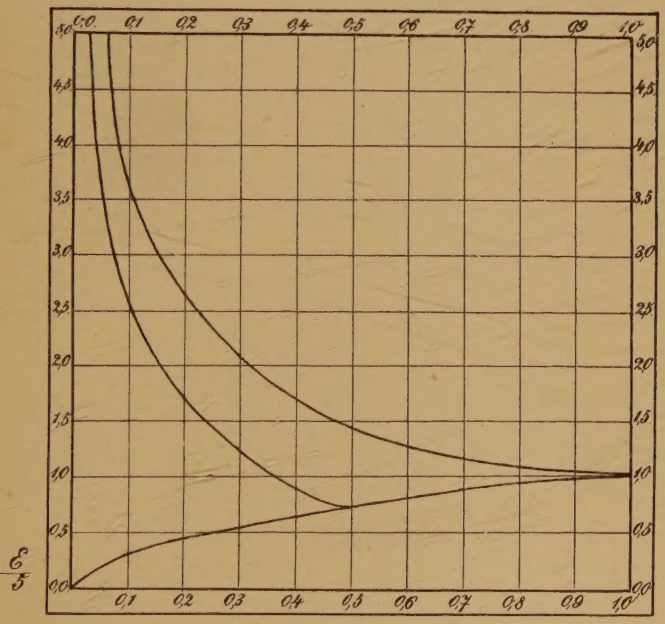
$$A = -\omega^2 R = -K$$

und

$$A : A_1 = \omega^2 R : \omega_1{}^2 R_1 = K : K_1,$$

d. h. bei sehr starken Condensationen sind die Schwerkräfte an der äusseren Oberfläche des Hohlcylinders den Schwungkräften proportional.

Für die Grenze der Condensation wird also $A = -K = -2$, wie sich aus $A = A' + K = -4 + 2 = -2$ ergiebt.



XVIII. Kuntze: Rotirende Gleichgewichtsfiguren.

Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.